Ф. Ф. Драган, К. Ф. Присакарь, В. Д. Чепой, Задачи размещения на графах и свойство Хелли, *Дискрет. матем.*, 1992, том 4, выпуск 4, 67–73

Дискретная математика

том 4 выпуск 4 * 1992

УДК 519.1

ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ГРАФАХ И СВОЙСТВО ХЕЛЛИ

Ф.Ф. Драган, К.Ф. Присакарь, В.Д. Чепой

В работе для графов, семейство шаров которых обладает свойством Хелли и граф пересечения шаров триангулирован, построены полиномиальные алгоритмы решения задач о p-центре и r-доминировании. Получена также характеризация этого класса графов.

Пусть $G = (V, E)$ – обыкновенный связный n-вершинный граф, снабженный стандартной метрикой $d(x, y)$, равной количеству ребер кратчайшей цепи, соединяющей вершины x и y. Предположим, что на множестве вершин V задана неотрицательная целочисленная функция $r(x)$. Будем говорить, что вершина x доминируется вершиной y, если $d(x, y) \leqslant r(x)$. Множество $M \subset V$ назовем r-доминирующим, если любая вершина $x \in V$ доминируется некоторой вершиной из M. Задача об r-доминировании состоит в нахождении наименьшего r-доминирующего множества графа.

Наряду с задачей о r-доминировании рассмотрим известную задачу о p-центре графа [1–4]. Пусть каждой вершине $x \in V$ графа G приписан неотрицательный вес $w(x)$. Требуется найти такое множество $Y \subset V$ мощности p, чтобы наибольшее из "взвешенных" расстояний от вершин графа до множества Y было минимально, т.е. найти

$$\min\{\max\{w(x)\,d(x, Y):\ x \in V\}:\ Y \subset V,\ |Y| = p\},$$

где $d(x, Y) = \min\{d(x, z):\ z \in Y\}$.

Целый ряд экстремальных задач на графах сводится к задаче об r-доминировании. Так, при $r(x) \equiv 1$ получаем известную задачу о доминирующем (внешне устойчивом) множестве [1], а при $r(x) \equiv k$ – задачу о k-доминировании [5] или о минимальном покрытии вершин графа шарами радиуса k [1]. Задача о p-центре также сводится к решению нескольких задач об r-доминировании. Отметим, что все эти задачи относятся к разряду NP-трудных [3, 4].

В данной работе рассматривается специальный метод решения указанных выше задач и характеризуется класс графов, для которых этот метод эффективен. Полученный класс графов содержит деревья, степени деревьев, интервальные и сильно-хордовые графы. После предварительной публикации [6] этих результатов появилась работа [7]. В ней для сильно хордовых графов построен полиномиальный алгоритм решения задачи, аналогичной задаче об r-доминировании. Этот результат является частным случаем нашего результата.

Напомним, что некоторое семейство множеств $\mathcal{F} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ обладает свойством Хелли, если любое подсемейство из $\mathcal{F}$ имеет непустое пересечение, как только каждые два множества этого подсемейства пересекаются.

Определим граф пересечений $\Gamma(\mathcal{F})$ семейства $\mathcal{F}$ следующим образом: вершинами графа $\Gamma(\mathcal{F})$ являются элементы семейства $\mathcal{F}$, причем вершины M_i и M_j, $i \neq j$, смежны тогда и только тогда, когда $M_i \cap M_j \neq \phi$.

Для каждой вершины x графа G можно определить шар $N(x, k) = \{z \in V: : d(x, z) \leqslant k\}$ радиуса k с центром в вершине x. Обозначим через $\mathfrak{N}_k$ семейство всех шаров радиуса k, а через $\mathfrak{N} = \{N(x,k): x \in V, k \in \mathrm{N} \cup \{0\}\}$ – семейство всех шаров графа G.

Допустим теперь, что семейство шаров $\mathfrak{N}$ графа G обладает свойством Хелли (такие графы в [8] названы графами Хелли). Для каждой вершины $x \in V$ рассмотрим шар радиуса $r(x)$ с центром в x. Совокупность всех таких шаров обозначим через $\mathfrak{M}$. Каждому полному подграфу графа $\Gamma(\mathfrak{M})$ в G соответствует семейство попарно пересекающихся шаров из $\mathfrak{M}$, и наоборот. По свойству Хелли это семейство имеет в G непустое пересечение. Любая вершина из пересечения доминирует одновременно центры всех шаров этого семейства. Следовательно, любому покрытию графа $\Gamma(\mathfrak{M})$ полными подграфами соответствует r-доминирующее множество графа G той же мощности, что и это покрытие. Наоборот, каждому r-доминирующему множеству графа G соответствует покрытие полными подграфами графа $\Gamma(\mathfrak{M})$. Таким образом, исходная задача о r-доминировании для графа G равносильна задаче о покрытии кликами (наибольшими по включению полными подграфами) графа $\Gamma(\mathfrak{M})$. Поэтому, если для G эффективно находится минимальное покрытие кликами графа $\Gamma(\mathfrak{M})$, то эффективно решается и задача об r-доминировании. Ниже мы рассмотрим случай, когда граф $\Gamma(\mathfrak{N})$ триангулирован. Минимальное покрытие кликами такого графа находится за $O(|V| + |E|)$ операций [9]. Напомним [10], что граф называется *триангулированным*, если в нем нет порожденного подграфа, изоморфного циклу длины большей трех.

Граф G, семейство $\mathfrak{N}$ которого обладает свойством Хелли и граф $\Gamma(\mathfrak{N})$ триангулирован, назовем HT-графом.

Предложенный метод решения задачи о r-доминировании для HT-графов будет иметь сложность $O(n^2)$ операций. Алгоритм сложности $O(n^2 \log_2 n)$ для решения задачи о p-центре на HT-графах можно получить следующим образом.

Представим задачу о p-центре в виде

$$\min\{r: w(x)\, d(x, Y) \leqslant r, \quad x \in V, \quad Y \subset V, \quad |Y| = p\}.$$

Если положить $r(x)$ равным $[r/w(x)]$ при $w(x) \neq 0$ и диаметру графа в противном случае, то получим задачу о r-доминировании

$$\min\{|Y|: d(x, Y) \leqslant r(x), \quad x \in V, \quad Y \subset V\}.$$

Легко видеть, что оптимальное значение r_p задачи о p-центре равно наименьшему числу r, при котором значение полученной задачи об r-доминировании не превосходит числа p. Поскольку r_p является элементом "взвешенной" матрицы $A = (w(x_i) d(x_i, x_j))$ расстояний графа G, применяя бинарный поиск к списку упорядоченных по неубыванию элементов этой матрицы и используя алгоритм решения задачи о r-доминировании, найдем решение задачи о p-центре.

Далее подробно остановимся на характеризации и распознавании класса HT-графов.

Напомним, что квадрат G^2 графа G – это граф с тем же множеством вершин V, что и G, но в котором вершины $x, y \in V$, $x \neq y$, смежны тогда и только тогда, когда $d(x, y) \leqslant 2$. Граф G^2 совпадает с $\Gamma(\mathfrak{N}_1)$. Действительно, в произвольном графе шары $N(x, p)$, $N(y, q)$ пересекаются тогда и только тогда, когда $d(x, y) \leqslant p + q$.

Пусть $\langle x, y \rangle = \{ z \in V\colon\ d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)\}$ – метрический отрезок с концами в вершинах x, y.

Лемма 1. *Граф $\Gamma(\mathfrak{N})$ триангулирован тогда и только тогда, когда триангулирован квадрат G^2 графа G.*

Доказательство. Граф $G^2 = \Gamma(\mathfrak{N}_1)$ является индуцированным подграфом графа $\Gamma(\mathfrak{N})$, поэтому если $\Gamma(\mathfrak{N})$ триангулирован, то и G^2 триангулирован. Докажем теперь обратное. Среди всех максимальных индуцированных циклов графа $\Gamma(\mathfrak{N})$ выберем цикл

$$L = (N(x_1, r_1), \ldots, N(x_k, r_k),\ N(x_1, r_1))$$

с минимальной суммой $\sigma = r_1 + \ldots + r_k$. Покажем, что этот цикл состоит из единичных шаров, т.е. $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 1$. Предположим обратное, причем пусть $r_1 \geqslant 2$.

Покажем, что для произвольных вершин $a \in N(x_1, r_1) \cap N(x_2, r_2)$, $b \in \in N(x_1, r_1) \cap N(x_k, r_k)$ выполняется соотношение $\langle a, x_1 \rangle \cap \langle b, x_1 \rangle = \{x_1\}$. Если это не так, то рассмотрим некоторую, отличную от x_1 вершину $\bar{x}_1 \in \langle a, x_1 \rangle \cap \langle b, x_1 \rangle$. Пусть $\bar{r}_1 = r_1 - d(x_1, \bar{x}_1)$. Шары $N(\bar{x}_1, \bar{r}_1)$, $N(x_2, r_2), \ldots, N(x_k, r_k)$ образуют в $\Gamma(\mathfrak{N})$ цикл длины k. Поскольку $N(\bar{x}_1, \bar{r}_1) \subset N(x_1, r_1)$, этот цикл является индуцированным. Сумма радиусов шаров равна $\sigma - d(x_1, \bar{x}_1) < \sigma$ в противоречие с выбором цикла L.

Рассмотрим смежные с x_1 вершины $x_1' \in \langle a, x_1 \rangle$, $x_1'' \in \langle b, x_1 \rangle$. В силу доказанного $x_1' \neq x_1''$ и $N(x_1', r_1 - 1) \cap N(x_k, r_k) = \phi$, $N(x_1'', r_1 - 1) \cap N(x_2, r_2) = \phi$. Следовательно, цикл

$$(N(x_1', r_1 - 1),\ N(x_1'', r_1 - 1),\ N(x_2,\ r_2), \ldots, N(x_k, r_k),\ N(x_1', r_1 - 1))$$

длины $k + 1$ является индуцированным в $\Gamma(\mathfrak{N})$, в противоречие с выбором цикла L. Итак, L состоит из единичных шаров, т.е. L – индуцированный цикл графа $\Gamma(\mathfrak{N}_1) = G^2$. Лемма доказана.

Для графа G через $G(Y)$ обозначим подграф, индуцированный множеством вершин $Y \subset V$.

Вершина x графа G называется *симплициальной* в G, если $N(x, 1)$ порождает полный подграф. Известно, что любой триангулированный граф содержит симплициальную вершину [10]. Более того, справедлива

Лемма 2 [10]. *Граф G триангулирован тогда и только тогда, когда существует его разборка по симплициальным вершинам, т.е. такое упорядочение $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ вершин из G, что x_i симплициальна в $G(x_i, \ldots, x_n)$.*

Вершину x графа G назовем *экстремальной*, если существует такая вершина y, что $N(y, 1) = N(x, 2)$.

Лемма 3. *Любой HT-граф G содержит хотя бы одну экстремальную вершину x, причем $G - x = G(V \setminus \{x\})$ также является HT-графом.*

Доказательство. Если в графе G существует коническая вершина, то утверждение леммы очевидно. Предположим поэтому, что G не содержит конической вершины, т.е. для любого $x \in V$ существует вершина y такая, что $d(x, y) \geqslant 2$. Граф $G^2 = \Gamma(\mathfrak{N}_1)$ триангулирован как подграф триангулированного графа $\Gamma(\mathfrak{N})$. Следовательно, G^2 содержит симплициальную вершину x. Рассмотрим в G семейство единичных шаров $S = \{N(z, 1)\colon\ z \in N(x, 2)\}$. Поскольку $d(z_1, z_2) \leqslant 2$ для любых двух вершин $z_1, z_2 \in N(x, 2)$, шары $N(z_1, 1)$, $N(z_2, 1)$ пересекаются. По свойству Хелли все шары из S имеют общую вершину $y \neq x$, т.е. $N(x, 2) \subset N(y, 1)$. Обратное включение очевидно. Итак, вершина x является экстремальной.

Докажем теперь, что $G - x$ является HT-графом. Любую кратчайшую цепь между вершинами $u, v \neq x$, проходящую через вершину x, можно заменить на цепь той же длины, проходящую через вершину y. Следовательно, $G - x$ – изометрический подграф графа G. Отсюда, в частности, вытекает, что $(G - x)^2$ является подграфом графа G^2, т.е. граф $(G - x)^2$ триангулирован. Согласно лемме 1 и граф пересечений шаров графа $G - x$ триангулирован. Так как $G - x$ – изометрический подграф графа G, любой шар $N(z, r)$ графа $G - x$ может отличаться от аналогичного шара графа G только вершиной x. Далее, если $z \neq x$, то $d(x, z) \geqslant d(y, z)$, т.е. любой шар из G, содержащий вершину x, содержит и вершину y. В графе $G - x$ рассмотрим произвольное семейство S' попарно пересекающихся шаров. Тогда попарно пересекаются и аналогичные шары из G. По свойству Хелли их пересечение непусто. Отметим, что вершина x принадлежит этому пересечению только одновременно с y. Итак, пересечение шаров из S' непусто в $G - x$, т.е. $G - x$ – граф Хелли. Лемма доказана.

Теорема. *Для графа G следующие условия эквивалентны*:

1) *G является НТ-графом*;

2) *граф G^2 триангулирован, и семейство единичных шаров обладает свойством Хелли*;

3) *существует разборка графа G по экстремальным вершинам, т.е. такое упорядочение $x_1, \ldots, x_n$ вершин множества V, что вершина x_i экстремальна в $G(x_i, \ldots$ $\ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$*;

4) *в G существует такое остовное дерево T, что любая клика графа G порождает в T поддерево*;

5) *в G существует такое остовное дерево T, что любой шар графа G порождает в T поддерево.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$2) очевидна.

2) $\Rightarrow$3). Импликация вытекает из доказательства леммы 3.

3) $\Rightarrow$4). Импликацию докажем индукцией по числу вершин. Рассмотрим экстремальную вершину x графа G такую, что граф $G - x$ удовлетворяет условию 3) (в качестве x можно взять первую вершину разборки по экстремальным вершинам графа G). Пусть $N(x, 2) = N(y, 1)$ для некоторой вершины $y \in V$. Если $y = x$, то граф G содержит коническую вершину, и потому свойство 4) очевидно. Допустим, что $x \neq y$. По предположению индукции в графе $G - x$ существует остовное дерево, удовлетворяющее условию 4). Среди всех таких остовов выберем тот, в котором вершина y смежна с максимальным числом вершин из $N(x, 1)$. Обозначим его через T и докажем, что в T вершина y смежна со всеми вершинами из $N(x, 1) \setminus \{x, y\}$.

Предположив противное, рассмотрим несмежные в T вершины y и $z \in N(x, 1)$ и цепь $(y, \ldots, v, z)$ между ними в дереве T. При удалении ребра (v, z) дерево T распадается на два поддерева T_v, T_z, причем $v \in T_v$, $z \in T_z$. По остову T построим следующим образом дерево T': из T удалим ребро (v, z) и добавим ребро (y, z). Поскольку вершины z и y смежны в $G - x$, то T' является остовом графа $G - x$. Докажем теперь, что T' удовлетворяет условию 4). Пусть K – некоторая клика из $G - x$. Если $z \notin K$, то K принадлежит одному из поддеревьев T_v или T_z, т.е. K порождает в T' то же поддерево, что и в T. Если же $z \in K$, то $y \in K$ (следствие соотношения $N(z, 1) \subset N(y, 1)$). Рассмотрим произвольные вершины $u_1, u_2 \in K$. Если в T они принадлежат общему поддереву T_v или T_z, то цепь, соединяющая в T эти вершины, соединяет их и в T'. Допустим поэтому, что $u_1 \in T_v$, $u_2 \in T_z$. В T_v вершины u_1 и y соединены цепью l_1, состоящей из вершин множества K. Аналогичным образом, u_2 и z соединены в T_z цепью l_2 такого же типа. Но тогда вершины u_1 и u_2 соединены в T' цепью, состоящей из l_1, ребра (y, z) и l_2. Таким образом, клике K соответствует в T' поддерево, т.е. T' удовлетворяет условию 4). Противоречие с выбором остова T.

Итак, вершина y смежна в T со всеми вершинами из окружения вершины x в G. Рассмотрим остов T_1 графа G, полученный из T добавлением висячей вершины x, смежной в T_1 с y. Легко видеть, что дерево T_1 также удовлетворяет условию 4) теоремы.

4) $\Rightarrow$ 5). Пусть T – такое остовное дерево графа G, что любая клика из G порождает в T поддерево. Покажем, что и любому шару $N(z, r)$ соответствует в T поддерево. Для этого достаточно доказать следующий факт: вершину z и любую вершину $v \in N(z, r)$ можно соединить в T цепью из вершин шара $N(z, r)$. В G рассмотрим некоторую кратчайшую цепь $v = v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1} = z$ между v и z. Обозначим через K_i некоторую клику из G, содержащую ребро (v_i, v_{i+1}), $i = 1, \ldots$ $\ldots, k$. По предположению вершины v_i, v_{i+1} можно соединить в T цепью l_i, вершины которой принадлежат клике K_i. Множество

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} l_i$$

образует в T некоторое поддерево $T(L)$. Следовательно, вершины v и z соединены в $T(L)$ (и потому в T) некоторой цепью l. Любая клика K_i принадлежит шару $N(z,r)$, поскольку для всех $w \in K_i$

$$d(z,w) \leqslant d(z,v_i) \leqslant r.$$

Теперь необходимый факт следует из включений

$$l \subset L \subset \bigcup_{i=1}^{k} K_i \subset N(z,r).$$

5) $\Rightarrow$ 1). Доказательство импликации вытекает из двух известных свойств поддеревьев дерева:

а) семейство поддеревьев дерева обладает свойством Хелли;

б) граф пересечений поддеревьев дерева является триангулированным [11]. Теорема доказана.

Из разбираемости *HT*-графов по экстремальным вершинам очевидным образом следует полиномиальный алгоритм распознавания этих графов. При соответствующей организации алгоритма его сложность составит $O(|E|)$ операций.

Вершины v и w сравнимы в графе G, если $N(v, 1) \subseteq N(w, 1)$ или $N(w, 1) \subseteq N(v, 1)$. Вершина u графа G называется *простой*, если вершины из $N(u, 1)$ попарно сравнимы, т.е. множество $\{N(v, 1)\colon v \in N(u, 1)\}$ линейно упорядочено по включению. Очевидно, любая простая вершина является как экстремальной, так и симплициальной. Следуя работам [12, 13], граф G назовем *сильно хордовым*, если он допускает разборку по простым вершинам.

Следствие 1. *Любой сильно хордовый граф является HT-графом.*

Для графа G с семейством единичных шаров $\mathfrak{N}_1$ и семейством клик $\mathfrak{S}$ через $N(G)$ и $K(G)$ обозначим соответственно гиперграфы вида $H' = (V, \mathfrak{N}_1)$, $H'' = (V, \mathfrak{S})$.

Напомним, что гиперграф $H = (X, \mathfrak{E})$ называется *гипердеревом* [14], если на множестве X можно построить такое дерево T, что любое ребро из $\mathfrak{E}$ порождает в T поддерево.

Следствие 2. *Для графа G следующие условия эквивалентны*:

1) *G – HT-граф*;

2) *$N(G)$ – гипердерево*;

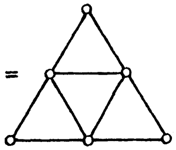
3) *$K(G)$ – гипердерево*.

Аналогичная характеризация сильно хордовых графов через вполне уравновешенные гиперграфы была получена в [12]. Заметим также, что любой вполне уравновешенный гиперграф является гипердеревом.

Итак, на основе специального метода получены полиномиальные алгоритмы решения задач об r-доминировании и p-центре на *HT*-графах. Этот метод применим ко всем графам Хелли. Однако его эффективность существенно зависит от эффективности решения задачи о минимальном покрытии кликами графа пересечения шаров данного графа Хелли. Для произвольных графов Хелли имеет место следующий результат.

Предложение. *Задача о доминировании в классе графов Хелли является NP-полной.*

Доказательство. Напомним, что граф $G(X_1 \cup X_2, U)$ называется расколотым, если $X_1 \cap X_2 = \phi$ и $G(X_1)$ – полный, а $G(X_2)$ – пустой подграфы. Индукцией по числу шаров легко доказать, что любой расколотый граф без индуцированных подграфов вида S_3 (см. рисунок) является графом Хелли. Докажем теперь,

$S_3 =$ 

что NP-полная задача о вершинном покрытии графа без треугольников [15, с. 242–243] полиномиально сводится к задаче о доминировании на расколотых графах без S_3.

Пусть $G = (X, E)$ – граф без треугольников. По графу G построим расколотый граф $G_0 = (X \cup E, U)$ следующим образом:

а) любые две вершины из X соединим ребром в G_0;

б) если $x \in X$, $e \in E$, то $(x, e) \in U$ тогда и только тогда, когда вершина x инцидентна в G ребру e.

Поскольку в исходном графе G нет треугольников, то G_0 не содержит S_3. Покажем, что G имеет вершинное покрытие мощности k тогда и только тогда, когда G_0 имеет доминирующее множество мощности k. Очевидно, если A – вершинное покрытие графа G, то A – доминирующее множество в G_0. Обратно, пусть B – минимальное доминирующее множество графа G_0. Тогда любую вершину $e \in E \cap B$ можно заменить любой вершиной из X, инцидентной в графе G ребру e. Таким образом можно получить доминирующее множество $B' \subset X$, $|B'| = |B|$. Следовательно, B' – вершинное покрытие графа G.

Авторы выражают благодарность рецензенту за советы, способствовавшие улучшению данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.
2. Kolen A. Duality in the tree location theory // Cah. Cent. Etud Rech. Oper. – 1983. – V. 25, № 3–4. – P. 201–215.
3. Kariv O., Hakimi S.L. An algorithmic approach to network location problems. – I: The p-centers // SIAM J. Appl. Math. – 1979. – V. 37, № 3. – P. 513–538.
4. Tansel B., Francis R., Lowe T. Location on networks: A survey. – I, II // Manag. Sci. – 1983. – № 4. – P. 482–511.
5. Chang G.J., Nemhauser G.L. The k-domination and k-stability problems on sun-free chordal graphs // SIAM J. Alg. Discrete Meth. – 1984. – V. 5, № 3. – P. 332–345.
6. Драган Ф.Ф., Присакарь К.Ф., Чепой В.Д. Задачи об r-доминировании и p-центрах графов: специальный метод решения и графы, к которым он применим / Кишиневский ун-т. – Кишинев, 1987. – 22 с. – Деп. в МолдНИИНТИ, № 948–М88.
7. Chang G.J. Labeling algorithms for domination problems in sun-free chordal graphs // Discrete Appl. Math. – 1988. – V. 22, № 1. – P. 21–34.
8. Quilliot A. On the Helly property working as a compactness criterion on graphs // J. Combin. Theory. – 1985. V. B40, № 1. – P. 186–193.

9. R o s e D.J., T a r j a n R.E., L u e k e r G.S. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs // SIAM J. Comput. – 1976. – V. 5, № 2. – P. 266–283.
10. D i r a c G.A. On rigid circuit graphs // Abh. math. univ. – Hamburg, 1961. – B. 25. – S. 71–76.
11. B u n e m a n P. A characterization of rigid circuit graphs // Discrete Math. – 1974. – V. 9, № 2. – P. 205–212.
12. F a r b e r M. Characterization of strongly chordal graphs // Discrete Math. – 1983. – V. 43, № 2–3. – P. 173–189.
13. F a r b e r M. Domination, independent domination and duality in strongly chordal graphs // Discrete Appl. Math. – 1984. – V. 7, № 2. – P. 115–130.
14. F l a m e n t C. Hypergraphs arbres // Discrete Math. – 1978. – V. 21, № 2. – P. 223–227.
15. Г э р и М., Д ж о н с о н Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.

Статья поступила 14.08.89